

Правительство Российской Федерации
Государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего профессионального образования

Государственный университет=
Высшая школа экономики
Нижегородский филиал

Факультет экономики

Программа дисциплины

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

для направления 080100.62 «Экономика»,
для направления 080100.62 «Экономика» профиль «Мировая экономика»
подготовки бакалавра

Автор: профессор А.М. Силаев, asilaev@hse.ru

Рекомендована УМС
Секция «Экономика»
Председатель
_____ С.Ю. Хасянова

«___» _____ 2010 г.
Утверждено УМС филиала
Председатель
_____ Л.Г. Макарова

«___» _____ 2010г.

Одобрено на заседании кафедры
«Математической экономики»
Зав. кафедрой
_____ А.М. Силаев

«___» _____ 2010 г.

Нижний Новгород, 2010 г.

1. Пояснительная записка

Аннотация. Программа дисциплины содержит как необходимые общематематические разделы, посвященные статической оптимизации и управлению в детерминированных условиях, так и прикладные разделы, актуальные для работы в различных предметных областях экономики. Целью курса является ознакомление студентов с разработанными к настоящему времени математическими методами анализа социально-экономических явлений и процессов. Изучаемый материал предназначен для дальнейшего использования и развития в экономических и финансовых дисциплинах

Требования к студентам. Курс «Методы оптимальных решений» предназначен для студентов II курса НФ ГУ ВШЭ направления 080100.62 «Экономика» подготовки бакалавра и читается в течение двух модулей четвертого семестра.

Учебная дисциплина «Методы оптимальных решений» использует материал предшествующих ей дисциплин учебного плана направления 080100.62 «Экономика»: «Математический анализ», «Дискретные математические модели», «Линейная алгебра», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Дифференциальные и разностные уравнения», «Микроэкономика-2», «Макроэкономика-2»..

Учебная задача курса. В результате изучения курса студент должен иметь представление о методах современной теории оптимизации, управления и исследования операций. Студент должен знать основные типы математических моделей, используемых при описании сложных систем и при принятии решений. Студент должен овладеть методологией системного анализа реальных ситуаций в целях построения адекватных им моделей и методов, в целях сравнительного анализа моделей и выбора наилучших в соответствии с заданными критериями оптимальности решений.

Формы контроля. Основными критериями служат посещение лекционных и семинарских занятий, выполнение домашних заданий и активное участие в работе семинара. В процессе изучения курса студенты выполняют контрольные работы, которые состоят из теоретических вопросов и счетных задач. Предварительная зачетная оценка выставляется с учетом суммарного количества баллов, полученных студентами за контрольные работы и работу на семинаре по накопительной системе.

Итоговая оценка формируется из предварительной с учетом ответа на зачете.

2. Тематический план учебной дисциплины

№ №	Название темы	Всего часов	Аудиторные часы			Самостоятельная работа
			Всего ауд. час.	Лекции	Сем. и практ. Занятия	
1.	Введение. Математические модели и оптимизация в экономике. Общее представление о статической задаче оптимизации.	16	4	2	2	12
2.	Нелинейные оптимизационные модели и нелинейное программирова-	28	12	6	6	16

3.	Задачи линейного программирования.	30	12	6	6	18
4.	Некоторые специальные задачи линейного программирования.	34	16	8	8	18
5.	Основные понятия многокритериальной оптимизации.	24	16	8	8	18
6.	Детерминированные модели управления запасами.	30	10	5	5	20
	Всего часов	162	70	35	35	92

3. Формы рубежного контроля и структура итоговой оценки

Итоговая оценка по учебной дисциплине складывается из следующих элементов:

1. Работа на практических занятиях (обсуждения задач, микроконтрольные работы).
2. Письменные аудиторские контрольные работы (1 работа, 80 мин.).
3. Домашние контрольные работы (1 работа).
4. Зачет.

Оценка за текущий контроль = $0,4 * \text{Оценка за домашнюю к/р} + 0,4 * \text{Оценка за аудиторскую к/р} + 0,2 * \text{Оценка за практические занятия}$

Оценка итоговая = $0,7 * \text{О за текущий контроль} + 0,3 \text{О за зачет}$

4. Содержание программы

Тема 1. Введение. Математические модели и оптимизация в экономике.

Общее представление о статической задаче оптимизации.

Использование математических моделей для описания поведения экономических агентов. Рациональное поведение. Использование оптимизации как способа описания рационального поведения. Теория оптимизации и методы выбора экономических решений.

Основные представления о статической задаче оптимизации. Инструментальные переменные и параметры математической модели. Допустимое множество. Критерий выбора решения и целевая функция. Формулировка детерминированной статической задачи оптимизации.

Классические методы оптимизации (повторение). Виды экстремумов. Достаточное условие существования глобального экстремума (теорема Вейерштрасса). Безусловная оптимизация (в отсутствии ограничений). Производная по направлению и градиент. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Максимумы во внутренних и граничных точках допустимого множества.

Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. Гл. 1, 2.

2. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 20.

Дополнительная литература.

3. Лотов А.В. Методы оптимальных решений. Конспект курса лекций. – М.: ВШЭ, 2004

Тема 2. Нелинейные оптимизационные модели и нелинейное программирование.

Классификации задач математического программирования. Задача на условный экстремум, примеры из экономики. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа. Необходимые и достаточные условия условного экстремума. Интерпретация множителей Лагранжа. Условия Куна-Таккера как необходимые условия локальной оптимальности. Условие дополняющей нежесткости. Достаточное условие оптимальности в общей задаче нелинейного программирования.

Выпуклые задачи оптимизации. Основные понятия геометрии многомерного линейного пространства. Выпуклые множества. Примеры выпуклых множеств. Опорная гиперплоскость. Разделяющая гиперплоскость. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Условия выпуклости и вогнутости функций.

Формулировка выпуклой задачи нелинейного программирования. Условия Куна-Таккера как необходимые и достаточные условия оптимальности.

Примеры решения задач. Решение задач математического программирования с помощью MS-Excel. Анализ чувствительности. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.

Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. Гл. 4

2. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 20.

Дополнительная литература.

3. Лотов А.В. Методы оптимальных решений. Конспект курса лекций. – М.: ВШЭ, 2004

Тема 3. Задачи линейного программирования.

Формулировка задачи линейного программирования (ЛП). Примеры задач ЛП. Стандартная (нормальная) и каноническая формы представления задачи ЛП и сведения к ним.

Свойства допустимого множества и оптимального решения в задаче ЛП. Геометрический метод решения задач ЛП. Методы решения задач ЛП, основанные на направленном переборе вершин. Алгоритм симплекс-метода.

Функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче ЛП. Двойственные задачи линейного программирования. Теоремы двойственности. Интерпретация двойственных переменных. Анализ чувствительности оптимального решения к параметрам задачи линейного программирования.

Линейное программирование в среде MS Excel. Использование целочисленных переменных в задачах линейного программирования. Логические переменные. Проблема постоянных издержек.

Основная литература.

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Изд. Айрис-Пресс, 2002. Гл. 4, 5.

2. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 2-4; 20
3. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2004. Гл. 1-6.

Дополнительная литература.

4. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций / Учебник. М.: Экзамен, 2003.
5. Fletcher R. Practical methods of Optimization. Wiley, 2000.
6. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.

Тема 4. Некоторые специальные задачи линейного программирования.

Транспортные модели. Постановка транспортной задачи и ее математическая модель. Методы построения опорного решения: метод "северо-западного угла", метод минимального элемента матрицы транспортных издержек. Оптимальный план транспортной задачи. Метод потенциалов. Открытая модель транспортной задачи. Задача о назначениях. Венгерский метод. Транспортная модель с промежуточными пунктами.

Сетевые модели. Алгоритм построения минимального остовного дерева. Задача нахождения кратчайшего пути. Задача о максимальном потоке. Нахождение потока наименьшей стоимости.

Модели целочисленного линейного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.

Применение линейного программирования для нахождения равновесия в антагонистических играх.

Основная литература.

1. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 5, 6.
2. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2004. Гл. 7, 8.

Дополнительная литература.

3. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций / Учебник. М.: Экзамен, 2003.
4. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – .: Издательство «Дело», 2007.

Тема 5. Основные понятия многокритериальной оптимизации

Происхождение и постановка задачи многокритериальной оптимизации. Множество достижимых критериальных векторов. Доминирование по Парето. Доминирование по Слейтеру. Эффективность (оптимальность) по Парето или Слейтеру. Эффективные решения и граница.

Понятие лица, принимающего решение. Основные типы методов решения задач многокритериальной оптимизации. Метод весовых коэффициентов. Определение коэффициентов веса параметров. Метод приоритетов. Целевое программирование. Компьютерные системы поддержки принятия решений, реализующие указанные методы.

Построение портфелей для минимизации общей дисперсии. Граница эффективности.

Основная литература.

1. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 8.

Дополнительная литература.

2. Лотов А.В. Краткий курс многокритериальной оптимизации и многокритериальных методов поддержки принятия решений. Конспект курса лекций. – М.: ВШЭ, 2004

Тема 6. Детерминированные модели управления запасами.

Важность проблемы управления запасами. Издержки по формированию и содержанию запасов (транспортные расходы, стоимость хранения, стоимость поставки). Базовые модели: модель экономического размера заказа, модель производства оптимальной партии продукции, модель планирования дефицита, учет оптовых скидок в модели экономического размера заказа, оптимальный размер заказа для группы товаров и др. Оптимальное управление запасами в условиях переменного спроса.

Основная литература.

1. Таха Х.М. Введение в исследование операций. М.: Вильямс, 2005. Гл. 11.
2. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2004. Гл. 16.

Дополнительная литература.

3. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход: Учеб. пособие. - М.: Дело, 2002.
4. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – .: Издательство «Дело», 2007.
5. Чейз Р.Б., Джейкобс Ф.Р., Аквилано Н.Дж. Производственный и операционный менеджмент. – М.: Вильямс, 2007.

5. Литература по курсу**Основная литература**

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. – М.: Айрис-Пресс, 2002.
2. Таха Х.М. Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2005.
3. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2004.
4. Косоруков О.А., Мищенко А.В. Исследование операций / Учебник. – М.: Экзамен, 2003.

Дополнительная литература

1. Банди Б. Основы линейного программирования. – М.: Радио и связь, 1989.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. – М.: Дрофа, 2004.
3. Дубина А.Г., Орлова С.С., Шубина И.Ю., Хромов А.Н. Excel для экономистов и менеджеров. – СПб: Питер, 2004.
4. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления для менеджеров: Компьютерно-ориентированный подход: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2002.
5. Зайцев М.Г., Варюхин С.Е. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы. – .: Издательство «Дело», 2007.
6. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб: Питер, 2000.

7. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб: ВHV – Санкт-Петербург. 1997.
8. Лотов А.В. Методы оптимальных решений. Конспект курса лекций. – М.: ВШЭ, 2004.
9. Лутманов С.В. Курс лекций по методам оптимизации. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и стохастическая динамика», 2001.
10. Хазанова Л.Э. Математические методы в экономике. Учебное пособие. М.: Изд. БЕК, 2002.
11. Чейз Р.Б., Джейкобс Ф.Р., Аквилано Н.Дж. Производственный и операционный менеджмент. – М.: Вильямс, 2007.
12. Bhatti M.A. Practical optimization methods : with Mathematica applications. – Springer-Verlag New York Inc., 2000.
13. Fletcher R. Practical Methods of Optimization. – Wiley, 2000.

6. Тематика заданий по формам контроля

Задача 1.

Фабрика по производству мороженого может выпускать пять сортов мороженого. При производстве мороженого используется два вида сырья: молоко и наполнители, запасы которых известны. Известны также удельные затраты сырья, а также цены продукции. Требуется построить план производства, который обеспечивает максимум дохода.

Задача 2.

Найти $\max(6x_1 - 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2)$ при условии, что $3x_1 + 4x_2 \leq 6$, $-x_1 + 4x_2^2 \leq 2$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Задача 3.

Требуется определить структуру перевозок (объемы перевозок, итоговую стоимость перевозки) между пунктами отправления и назначения с минимальной стоимостью. В качестве метода начального решения использовать метод наименьшей стоимости.

	Пункт назначения 1	Пункт назначения 2	Пункт назначения 3	Предложение
Пункт отправления 1	1	2	6	7
Пункт отправления 1	0	4	2	12
Пункт отправления 1	3	1	5	11
Спрос	10	10	10	

Задача 4.

Задача о назначениях. Распределить имеющиеся виды работ среди работников.

		Виды работ				
		1	2	3	4	5
Работники	1	3\$	8\$	2\$	10\$	3\$
	2	8\$	7\$	2\$	9\$	7\$
	3	6\$	4\$	2\$	7\$	5\$
	4	8\$	4\$	2\$	3\$	5\$
	5	9\$	10\$	6\$	9\$	10\$

Задача 5.

Ресторан заказывает мясной фарш в начале каждой недели для удовлетворения недельного спроса в 300 фунтов. Фиксированная стоимость размещения заказа равна 20 долларов. Стоимость замораживания и хранения одного фунта фарша обходится ресторану примерно в 0,03 доллара в день.

- а) Определите недельные затраты ресторана, связанные с существующей стратегией создания запаса.
- б) Определите оптимальную стратегию управления запасами, в предположении, что время выполнения заказа от момента его размещения до реальной поставки равно нулю.
- в) Вычислите разность между текущими недельными затратам ресторана и теми, которые определяются оптимальной стратегией управления запасами.

7. Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

1. Что такое инструментальные переменные и параметры математической модели? В чем состоит их отличие?
2. Что такое допустимое множество?
3. Что такое критерий оптимизации и целевая функция?
4. Что такое линии уровня целевой функции?
5. Дайте формулировку детерминированной статической задачи оптимизации.
6. Приведите примеры использования математических моделей для описания поведения экономических агентов.
7. Как методы оптимизации используются при принятии экономических решений?
8. Что такое глобальный максимум критерия и оптимальное решение?
9. Достаточное условие существования глобального максимума (теорема Вейерштрасса).
10. Назовите причины отсутствия оптимального решения.
11. Что такое локальный максимум?
12. Сформулируйте общую задачу нелинейного программирования.
13. Сформулируйте необходимое условие локального максимума в общей задаче нелинейного программирования.
14. Что такое функция Лагранжа?
15. Дайте определение седловой точки функции Лагранжа.
16. Сформулируйте и докажите достаточное условие оптимальности с помощью функции Лагранжа.
17. Сформулируйте условие дополняющей нежесткости и дайте его экономическую интерпретацию.
18. Дайте определение выпуклого множества.
19. Какие свойства имеют выпуклые множества?
20. Дайте определение опорной гиперплоскости.
21. Дайте определение разделяющей гиперплоскости.
22. Сформулируйте и проиллюстрируйте теорему об отделимости выпуклых множеств.
23. Сформулируйте понятие выпуклой и вогнутой функций.
24. Что такое строгая выпуклость функции?
25. Какие свойства имеют выпуклые функции?
26. Сформулируйте выпуклую задачу нелинейного программирования.

27. Сформулируйте теорему о глобальном максимуме в выпуклом случае.
28. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
29. Дайте экономическую интерпретацию множителей Лагранжа.
30. Как решения выпуклой задачи оптимизации зависят от параметров?
31. Сформулируйте задачу линейного программирования.
32. Приведите содержательные примеры задачи линейного программирования.
33. Что такое нормальная (стандартная) и каноническая формы задачи линейного программирования?
34. Какие свойства имеет допустимое множество задачи линейного программирования?
35. Какие свойства имеет оптимальное решение в задаче линейного программирования?
36. Как выглядят функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче линейного программирования?
37. Сформулируйте двойственную задачу линейного программирования.
38. Сформулируйте теоремы двойственности в задаче линейного программирования.
39. Примените графический метод для решения конкретной задачи линейного программирования.
40. Объясните симплекс-метод решения задач линейного программирования.
41. Использование целочисленных переменных в задачах линейного программирования. Логические переменные. Проблема постоянных издержек.
42. Транспортная задача и ее математическая модель. Методы построения решения. Несбалансированность: излишек запасов, дефицит запасов.
43. Задача о назначениях. Алгоритм решения.
44. Транспортная модель с промежуточными пунктами.
45. Сетевые модели. Алгоритм построения минимального остовного дерева.
46. Задача нахождения кратчайшего пути.
47. Задача о максимальном потоке. Нахождение потока наименьшей стоимости.
48. Модели целочисленного линейного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.
49. Применение линейного программирования для нахождения равновесия в антагонистических играх.
50. Сформулируйте постановку задачи многокритериальной оптимизации.
51. Дайте определение доминирования и оптимальности по Парето.
52. Дайте определение доминирования и оптимальности по Слейтеру.
53. Назовите основные подходы к построению методов поиска решений в задачах многокритериальной оптимизации.
54. Дайте определение задачи выбора оптимального портфеля активов.
55. Объясните возникновение границы эффективных портфелей.
56. Сформулируйте основные положения модели экономичного размера заказа.
57. Сформулируйте модель производства оптимальной партии продукции.
58. Сформулируйте модель планирования дефицита.
59. Учет оптовых скидок в модели экономического размера заказа,
60. Дайте определение задачи оптимального размера заказа для группы товаров.

8. Вопросы к зачету

1. Классические методы оптимизации. Виды экстремумов. Достаточное условие существования глобального экстремума, теорема Вейерштрасса. Безусловная оптимизация (в отсутствии ограничений).
2. Производная по направлению и градиент. Необходимые и достаточные условия локального экстремума. Максимумы во внутренних и граничных точках допустимого множества.
3. Классификации задач математического программирования. Задача на условный экстремум, примеры из экономики. Функция Лагранжа. Седловая точка функции Лагранжа. Необходимые и достаточные условия условного экстремума.
4. Интерпретация множителей Лагранжа. Условия Куна-Таккера как необходимые условия локальной оптимальности. Условие дополняющей нежесткости. Достаточное условие оптимальности в общей задаче нелинейного программирования.
5. Выпуклые задачи оптимизации. Основные понятия геометрии многомерного линейного пространства. Выпуклые множества. Примеры выпуклых множеств. Опорная гиперплоскость. Разделяющая гиперплоскость. Теорема об отделимости выпуклых множеств. Условия выпуклости и вогнутости функций.
6. Формулировка выпуклой задачи нелинейного программирования. Условия Куна-Таккера как необходимые и достаточные условия оптимальности. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа.
7. Формулировка задачи линейного программирования (ЛП). Примеры задач ЛП. Стандартная (нормальная) и каноническая формы представления задачи ЛП и сведение к ним.
8. Свойства допустимого множества и оптимального решения в задаче ЛП. Геометрический метод решения задач ЛП. Методы решения задач ЛП, основанные на направленном переборе вершин. Алгоритм симплекс-метода.
9. Функция Лагранжа и условия Куна-Таккера в задаче ЛП. Двойственные задачи линейного программирования. Теоремы двойственности. Интерпретация двойственных переменных. Анализ чувствительности оптимального решения к параметрам задачи линейного программирования.
10. Использование целочисленных переменных в задачах линейного программирования. Логические переменные. Проблема постоянных издержек.
11. Транспортные модели. Постановка транспортной задачи и ее математическая модель. Методы построения опорного решения: метод "северо-западного угла", метод минимального элемента матрицы транспортных издержек. Оптимальный план транспортной задачи. Открытая модель транспортной задачи.
12. Задача о назначениях. Венгерский метод.
13. Транспортная модель с промежуточными пунктами.
14. Сетевые модели. Алгоритм построения минимального остовного дерева.
15. Задача нахождения кратчайшего пути.
16. Задача о максимальном потоке. Нахождение потока наименьшей стоимости.
17. Модели целочисленного линейного программирования. Метод Гомори. Метод ветвей и границ.
18. Применение линейного программирования для нахождения равновесия в антагонистических играх.
19. Происхождение и постановка задачи многокритериальной оптимизации. Множество достижимых критериальных векторов. Доминирование по Парето. Домини-

рование по Слейтеру. Эффективность (оптимальность) по Парето или Слейтеру. Эффективные решения и граница.

20. Выбор оптимальных портфелей активов в задаче минимизации дисперсии доходности. Граница эффективных портфелей.
21. Издержки по формированию и содержанию запасов (транспортные расходы, стоимость хранения, стоимость поставки. Модель экономичного размера заказа.
22. Модель производства оптимальной партии продукции.
23. Модель планирования дефицита.
24. Учет оптовых скидок в модели экономического размера заказа, оптимальный размер заказа для группы товаров.

Автор программы

Силаев А.М.